Л 14. Некоторые приложения определенных интегралов.

Цель лекции: познакомить студентов с основными геометрическими и физическими приложениями определённого интеграла: вычислением площадей плоских фигур, площадей в полярных координатах, длины дуг кривых, объёмов тел вращения и площадей поверхностей вращения.

Основные вопросы

- Площадь плоской фигуры в декартовых координатах.
- Площадь криволинейной трапеции, в том числе заданной параметрическими уравнениями.
- Площадь фигуры в полярных координатах.
- Длина дуги кривой в декартовых, параметрических и полярных координатах.
- Объёмы тел вращения.
- Площадь поверхностей вращения.
- Примеры вычислений.

Краткое содержание: лекция посвящена основным приложениям определённого интеграла. Рассматриваются формулы для вычисления площади плоских фигур в декартовых и полярных координатах, методы нахождения длины дуги кривой, а также вычисления объёмов тел вращения и площадей поверхностей вращения. Приводятся примеры применения полученных формул.

С помощью определенных интегралов можно находить площади плоских фигур при различных способах задания границ области, длины дуг кривых, объемы тел и площади поверхностей вращения.

1. Площадь в декартовых координатах. Выше было показано, что в случае если функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке, $[a,b]$ то $\int_a^b f(x)dx$ выражает площадь соответствующей криволинейной трапеции $S(G)$. Если же $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox и $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Несложно проверить, что этот интеграл выражает площадь этой трапеции со знаком «минус». В общем случае, если функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен сумме площадей частей криволинейной трапеции, лежащих выше оси Ox, взятых со знаком «плюс» и частей, лежащих ниже оси со Ox, взятых знаком «минус».

Если график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ задан с помощью параметрических функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

где $y(t) \ge 0$ непрерывна, а $x(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле $S(G) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt$.

В этом можно убедиться, сделав в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ замену переменной $x = x(t)$.

Пример 1. Найдем площадь эллипса с полуосями a и b. Верхняя половина эллипса представляет из себя криволинейную трапецию, где кривая задается с помощью параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Поскольку значение $t = 0$ соответствует $x = a$, а $t = \pi$ - значению $x = -a$, то площадь всего эллипса есть

$$S(G) = 2\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t(a\cos t)' dt = 2ab\int\limits_0^{\pi} \sin^2 t dt = 2ab\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= ab\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - ab \cdot 0 = \pi ab.$$

2. Площадь в полярных координатах. Некоторые кривые линии на плоскости удобно описывать в системе координат, которая называется полярной.

Пусть на плоскости выбрана декартова система координат. Положительную полуось Ox будем называть полярной осью, а точку O полюсом. Пусть M - некоторая точка на плоскости.

Расстояние от точки M до O будем называть полярным радиусом ρ этой точки. Угол между полярной осью и вектором $\overline{OM}$ обозначим через φ. Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M.

На числа ρ и φ накладываются следующие естественные ограничения: $\begin{cases} \rho \ge 0 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).

Связь между декартовыми и полярными координатами точки M осуществляется с помощью соотношений $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Область G на плоскости, ограниченную лучами исходящими из начала координат, $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, где $\varphi_1 < \varphi_2$ и графиком непрерывной в отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$ неотрицательной функции $\rho = f(\varphi)$, будем называть криволинейным треугольником.

Разбив отрезок $[\varphi_1,\varphi_2]$ на n частей и заменив на каждом участке $\Delta\varphi_i$ площадь криволинейного треугольника на площадь кругового сектора радиуса $f(c_i)$ с углом $\Delta\varphi_i$ получим приближенную формулу $S(G)\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(c_i)\Delta\varphi_i$.

Здесь записанная сумма является интегральной суммой для функции $\rho=\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_1,\varphi_2]$. Перейдя в последнем соотношении к пределу при максимальном $\Delta\varphi_i\to 0$, получим точное выражение для площади криволинейного треугольника:

$$S(G)=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}f^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 2. Найдем площадь области, ограниченной линией $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли.

Область интегрирования находится из условия $\cos 2\varphi\ge 0$. Отсюда $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$. Достаточно найти площадь криволинейного треугольника для $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, которая составляет четверть площади всей области

$$S(G)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/4}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi=a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=a^2\sin\frac{\pi}{2}-a^2\sin 0=a^2.$$

3. Нахождение длины дуги кривой. Пусть кривая L с концами A и B на плоскости задана с помощью графика непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, где $x\in[a,b]$. Разобьем эту кривую на n частей точками $M_1,M_2,\ldots,M_{n-1}$, где M_i имеет координаты (x_i,y_i), $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$, $y_i-y_{i-1}=\Delta y_i$.

Длину вписанной в L ломаной с вершинами в выбранных точках обозначим через I_n:

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}.$$

Определение. Длиной кривой L называется предел суммы длин ломанных, вписанных в эту кривую, при максимальном Δx_i, стремящемся к нулю. Будем обозначать ее через $I(L)$.

$$I(L)=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}I_n.$$

Кривая, имеющая длину (если указанный предел существует), называется спрямляемой.

Теорема. График непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции $y=f(x)$ спрямляем, и его длина находится по формуле $I(L)=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Следствие 1. Пусть кривая L на плоскости задана с помощью непрерывно дифференцируемых параметрических функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Тогда эта кривая спрямляема, и ее длина находится по соответствующей формуле.

Следствие 2. Пусть кривая L в полярных координатах задана с помощью непрерывно дифференцируемой неотрицательной функции $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда эта кривая спрямляема и ее длина равна $I(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Пример 3. Найдем длину кардиоиды, задаваемой уравнением $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$. Поскольку $a(1 + \cos\varphi) \geq 0$ для всех φ, то

$$I(L) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos\frac{\varphi}{2} \right| d\varphi =$$

$$= 2a \left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi \right) = 4a \left(\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi} - \sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{2\pi} \right) = 4a(1+1) = 8a .$$

4. Вычисление объемов тел вращения с помощью определенных интегралов. Пусть в пространстве имеется тело T и ось Ox. Обозначим площадь области, полученной в результате сечения T плоскостью, проходящей через точку x на оси Ox перпендикулярно ей, через $Q(x)$. Пусть проекция тела T на Ox есть отрезок $[a,b]$, т.е. функция $y = Q(x)$ определена на этом отрезке. Будем считать, что $Q(x)$ непрерывны на $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n т частей точками x_i, и на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ заменим объем тела на объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и площадью основания $Q(c_i)$, где $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. В результате получим приближенную формулу для объема T

$$V(T) \approx \sum_{i=1}^{n} Q(c_i) \Delta x_i .$$

Перейдя в этом соотношении к пределу при максимальном $\Delta x_i \to 0$ получим точное значение объема T

$$V(T) = \int_a^b Q(x) dx$$

В случае, если тело T образовано вращением криволинейной трапеции, задаваемой непрерывной функцией $y = f(x)$ на $[a,b]$ вокруг Ox, площадь круга $Q(x)$ находится по формуле $Q(x) = \pi f(x)^2$, т.к. $f(x)$ есть радиус этого круга. Объем указанного тела вращения определяется соотношением

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$

Пример. Найдем объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции задаваемой графиком функции $y = x^2$, где $x \in [0,1]$ вокруг оси Ox. Используя полученную формулу, получаем $V(T) = \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

Замечание. Пусть рассмотренная выше криволинейная трапеция при $a,b \geq 0$ и $f(x) \geq 0$ вращается вокруг оси Oy. Можно доказать, что объем получившегося тела находится по формуле $V(T) = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

5. Нахождение площади поверхности вращения. Пусть график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, где $x \in [a,b]$ и $f(x) \geq 0$, вращается вокруг оси Ox. Можно доказать, что площадь получившейся поверхности вращения H находится по формуле

$$S(H) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется площадь криволинейной трапеции в декартовых координатах?
2. Как использовать параметрические уравнения для нахождения площади фигуры?
3. Запишите формулу площади области в полярных координатах.
4. Дайте определение длины дуги кривой.
5. Как вычисляется длина дуги, заданной параметрически?
6. Как найти длину дуги кривой в полярных координатах?
7. Запишите формулу объёма тела вращения вокруг оси Ox.
8. Как вычисляется площадь поверхности вращения?
9. Приведите пример применения формулы площади или объёма.

Литература

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Демидович Сборник задач по математическому анализу